ℓ-Kronecker 箙に付随する Frobenius 多様体

大阪大学 大学院理学研究科 数学専攻　大谷 拓己
Takumi Otani
Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University

概要

Frobenius 多様体は，複素幾何学，symplectic 幾何学，表現論など，様々な分野に現れる，複素微分幾何的構造を持つ複素多様体である．Frobenius 多様体の構成の一つに，一般化ルート系に付随する Weyl 群不変式論を用いた構成方法が知られている．本稿では，ℓ-Kronecker 箙に付随する一般化ルート系に対して，Weyl 群不変式論を用いた Frobenius 多様体の構成を紹介する．本稿は，池田氏（城西大学），白石氏（大阪大学），髙橋氏（大阪大学）との共同研究 [IOST] に基づく．

1　導入

Frobenius 多様体は，各点の接空間が可換な Frobenius 代数の構造をもつ複素多様体であり，Dubrovin により公理化されたものである [D]．原始形式の理論や（古典的）ミラー対称性など, 様々な話題で Frobenius 多様体が登場し，現在も活発に研究されている数学的対象である．Frobenius 多様体の存在は，定義からは非自明である．Frobenius 多様体の構成方法は，次の 3 つが知られている：

(1) 代数多様体上の種数 0 の Gromov–Witten 理論による方法.
(2) 正則関数の変形理論と原始形式を用いた方法.
(3) 一般化ルート系と Weyl 群不変式論を用いた方法.

これらの 3 種類の構成方法は未だ十分に理解されておらず，更なる理解と発展が望まれている．

本稿では,「(3) 一般化ルート系と Weyl 群不変式論を用いた方法」を中心に取り扱う．この構成方法が知られている枠組みは，大きく分けて次の場合である：

- 有限型 Weyl 群の場合（[S-K1, SYS, D]）.
- （拡大）affine 型 Weyl 群の場合（[DZ]）.
- 楕円型 Weyl 群の場合 ([D, Sat]).

この 3 種類のクラスでは，Cartan 形式が半正定値である．次に取り組むべきクラスは，Cartan 形式が不定型のものである．しかしながら，不定型の一般化ルート系は構造が非常に複雑であり，一

般論を展開する上で様々な技術的困難が生じる．研究 [IOST] では，最も基本となる ℓ-Kronecker 箙が定める不定型の一般化ルート系の場合に，Weyl 群不変式論を用いて Frobenius 構造を構成した（定理 4.10）．本稿では，三角圏や幾何学的な背景の視点を込めて，定理 4.10 の解説を行う．

本報告書は次のように構成されている．2 章では，一般化ルート系の基本事項について復習を行う．3 章では，Frobenius 多様体の定義や諸概念の準備を行う．準備の後，安定性条件の空間との期待される関係について述べる．4 章では，ADE 型の一般化ルート系に付随する Frobenius 多様体について説明した後，主結果を解説する．

2 一般化ルート系

この章では，齋藤恭司氏によって定義された一般化ルート系について復習する．基本事項を復習した後に，三角圏との関係や幾何学的な背景についての説明を行う．詳細については，[S-K2] 及び [髙橋] を参照せよ．

2.1 一般化ルート系の定義

まずは通常の意味での（simply-laced な）ルート系について復習を行う．

定義 2.1. 階数 μ のルート系を，

- 階数 $\mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の自由 $\mathbb{Z}$-加群 L,
- **Cartan 形式**と呼ばれる対称 $\mathbb{Z}$-双線型形式 $I\colon L \times L \longrightarrow \mathbb{Z}$,
- 部分集合 $\Delta_{\mathrm{re}} \subset L$,

からなる組 $(L, I, \Delta_{\mathrm{re}})$ で，以下の条件を満たすものとする：

(1) 部分集合 Δ_{re} は L を生成する．つまり，$L = \mathbb{Z}\Delta_{\mathrm{re}}$ が成り立つ．
(2) 任意の $\alpha \in \Delta_{\mathrm{re}}$ に対して，$I(\alpha, \alpha) = 2$ が成り立つ．
(3) 各 $\alpha \in \Delta_{\mathrm{re}}$ に対して，**鏡映** $r_\alpha \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(L, I)$ を

$$r_\alpha(\lambda) \coloneqq \lambda - I(\alpha, \lambda)\alpha, \quad \lambda \in L,$$

で定義する．このとき，$r_\alpha(\Delta_{\mathrm{re}}) = \Delta_{\mathrm{re}}$ が成立する．

ルート系 $(L, I, \Delta_{\mathrm{re}})$ に対し，集合 Δ_{re} の元を**実ルート**と呼ぶ．実ルートに付随する鏡映が生成する群 $W = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Delta_{\mathrm{re}} \rangle$ を **Weyl 群**という．また，$\mathbb{C}$-ベクトル空間 $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^*$ を

$$\mathfrak{h} \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{C}), \quad \mathfrak{h}^* \coloneqq L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C},$$

と定義する．このとき，自然なペアリング $\langle -, - \rangle\colon \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{C}$ が存在するため，$\mathfrak{h}$ 上の W-作用が

$$\langle \lambda, w(x) \rangle = \langle w^{-1}(\lambda), x \rangle, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*,\ x \in \mathfrak{h},\ w \in W,$$

により定められる．

Δ_{re} の部分集合 $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_\mu\}$ が

$$\Delta_{\mathrm{re}}=\{w(\alpha_i)\in\Delta_{\mathrm{re}}\mid \alpha_i\in B,\ w\in\langle r_{\alpha_1},\dots,r_{\alpha_\mu}\rangle\}$$

をみたすとき，B をルート系 $(L,I,\Delta_{\mathrm{re}})$ の**ルート基底**という．

定義 2.2. $(L,I,\Delta_{\mathrm{re}})$ を階数 μ のルート系とする．Weyl 群の元 $\mathbf{c}\in W$ が，あるルート基底 $B=\{\alpha_1,\dots,\alpha_\mu\}$ を用いて

$$\mathbf{c}=r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_\mu}$$

と表示できるとき，元 $\mathbf{c}$ を **Coxeter 元**という．

定義 2.3 ([S-K2])**.** ルート系 $(L,I,\Delta_{\mathrm{re}})$ と Coxeter 元 $\mathbf{c}$ の組 $R=(L,I,\Delta_{\mathrm{re}},\mathbf{c})$ を**一般化ルート系**という．

通常の ADE 型ルート系に Coxeter 元を一つ選んだものを，ADE 型の一般化ルート系と呼ぶことにする．一般化ルート系を考えることで, 通常のルート系よりも細かい分類がなされる ([NST])．例えば，D 型の場合には，非同型な 2 つの一般化ルート系があらわれる．Frobenius 構造の構成では Coxeter 元を一つ選ぶ必要が生じるため，一般化ルート系を考える必要がある．Coxeter 元の選び方により，得られる Frobenius 構造は一般に異なる．

2.2 一般化ルート系と三角圏

この節では，箙に付随する道代数の導来圏から，一般化ルート系が自然に得られることを説明する．三角圏を経由することで，ホモロジー的ミラー対称性や（後に説明する）安定性条件の空間の視点がもたらされる．これらの視点は，Frobenius 多様体やその周期写像を調べる上で重要な役割を果たす．

三角圏 $\mathcal{D}$ を，$\mathbb{C}$-線型かつ有限型であり，Serre 関手 $\mathcal{S}\in\operatorname{Aut}\mathcal{D}$ を持つものとする．自由 $\mathbb{Z}$-加群 L を，$\mathcal{D}$ の Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{D})$ とする．$K_0(\mathcal{D})$ 上には，Euler 形式とよばれる $\mathbb{Z}$-双線型形式

$$\chi\colon K_0(\mathcal{D})\times K_0(\mathcal{D})\longrightarrow\mathbb{Z},\quad \chi(E,F)\coloneqq\sum_{p\in\mathbb{Z}}(-1)^p\dim_{\mathbb{C}}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(E,F[p]),$$

が定義される．Euler 形式の対称化を $I\coloneqq\chi+\chi^T\colon L\times L\longrightarrow\mathbb{Z}$ であらわし，**Cartan 形式**とよぶ．また，部分集合 $\Delta_{\mathrm{re}}\subset L$ を

$$\Delta_{\mathrm{re}}\coloneqq\{[E]\in L\mid E\in\mathcal{D}\text{ は例外対象 }\}\tag{2.1}$$

と定義する．最後に, $\mathbf{c}\in\operatorname{Aut}(L,I)$ を $\mathbf{c}\coloneqq-[\mathcal{S}]$ と定める．これらをまとめて, $R_{\mathcal{D}}=(L,I,\Delta_{\mathrm{re}},\mathbf{c})$ であらわす．

命題 2.4 ([C-B, R, STW])**.** Q を非輪状かつ連結な箙とし，$\mathcal{D}^b(Q)$ を道代数 $\mathbb{C}Q$ 上の有限生成左加群のなす導来圏とする．このとき，組 $R_{\mathcal{D}^b(Q)}$ は一般化ルート系をなす．とくに，$\mathcal{D}^b(Q)$ の例外生成列 $(E_1,\dots,E_\mu)$ に対して，$\mathbf{c}=r_{[E_1]}\cdots r_{[E_\mu]}$ が成立する． □

$\vec{\Delta}$ を Dynkin 箙とする．すなわち，Dynkin グラフの各辺に（任意の）向きを付けたものとする．

系 2.5. 一般化ルート系 $R_{\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})}$ は，*ADE* 型の一般化ルート系と同型である． □

2.3 幾何学的背景

特異点の変形理論とルート系（及び Weyl 群不変式論）は密接に関連していて，古くから多くの研究がなされている．本節では，これらの対応を，一般化ルート系に焦点を当てて復習する．

$f\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ を ADE 型の多項式とする．すなわち，いずれかの多項式とする：

$$\begin{array}{ll} A_\mu \text{ 型：} & f(z_1,z_2,z_3) = z_1^{\mu+1} + z_2^2 + z_3^2 \\ D_\mu \text{ 型：} & f(z_1,z_2,z_3) = z_1^{\mu-1} + z_1 z_2^2 + z_3^2 \\ E_6 \text{ 型：} & f(z_1,z_2,z_3) = z_1^4 + z_2^3 + z_3^2 \\ E_7 \text{ 型：} & f(z_1,z_2,z_3) = z_1^3 + z_1 z_2^3 + z_3^2 \\ E_8 \text{ 型：} & f(z_1,z_2,z_3) = z_1^5 + z_2^3 + z_3^2 \end{array}$$

自由 $\mathbb{Z}$-加群 L を，f の Milnor ホモロジー群 $H_2(f^{-1}(1),\mathbb{Z})$ とする．L 上の対称双線型形式 I を，$I \coloneqq -I_{H_2}$ で定める．ここで，I_{H_2} は $H_2(f^{-1}(1),\mathbb{Z})$ 上の交叉形式である．また，部分集合 $\Delta_{\mathrm{re}} \subset L$ を

$$\Delta_{\mathrm{re}} \coloneqq \{\alpha \in L \mid I(\alpha,\alpha) = 2\}$$

と定義する．最後に，$\mathbf{c} \in \mathrm{Aut}(L,I)$ を $\mathbf{c} \coloneqq \mathbf{h}_f^{-1}$ と定める．ただし，$\mathbf{h}_f$ は Milnor モノドロミーをあらわしている．これらをまとめて，$R_f = (L, I, \Delta_{\mathrm{re}}, \mathbf{c})$ であらわす．

定理 2.6. $f\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ を *ADE* 型の多項式，$\vec{\Delta}$ を f に対応する型の *Dynkin* 箙とする．このとき，R_f は一般化ルート系をなす．さらに，一般化ルート系としての同型写像

$$R_f \cong R_{\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})}$$

が存在する． □

複素多様体 M_f を $M_f \coloneqq \mathbb{C}^\mu$ とする．関数 $f\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して，その普遍開折（変形）$F\colon \mathbb{C}^3 \times M_f \longrightarrow \mathbb{C}$ が存在する．複素多様体 M_f 上には，原始形式の理論によって導かれる Frobenius 構造の存在がする [ST]（注意 4.3 も参照）．後ほど定理 4.1 で説明するように，次の複素多様体の同型がある：

$$M_f \cong \mathfrak{h}/\!\!/W$$

複素多様体 $\mathfrak{h}/\!\!/W$ については，節 4.1 にて説明を行う．

3 Frobenius 多様体

この章では，Frobenius 多様体に関する諸概念と基本的な結果についての復習を行う．また，三角圏の安定性条件と Frobenius 多様体の間の期待される関係性について説明を行う．Frobenius 多

様体の基本事項は，文献 [髙橋] を参考にしている．

3.1 Frobenius 多様体と周期写像

定義 3.1. M を μ 次元連結複素多様体とし，$\mathcal{T}_M$ を接層，Ω_M^1 を余接層とする．M 上の次元 $d \in \mathbb{C}$ の **Frobenius 構造**とは

- $\mathcal{T}_M$ 上の非退化対称 $\mathcal{O}_M$-双線型形式 $\eta\colon \mathcal{T}_M \times \mathcal{T}_M \longrightarrow \mathcal{O}_M$,
- $\mathcal{T}_M$ 上の結合的かつ可換な $\mathcal{O}_M$-双線型な積 $\circ\colon \mathcal{T}_M \times \mathcal{T}_M \longrightarrow \mathcal{T}_M$,
- 積 $\circ$ に関する単位元となる M 上の正則ベクトル場 $e \in \Gamma(M, \mathcal{T}_M)$,
- **Euler ベクトル場**とよばれる M 上の正則ベクトル場 $E \in \Gamma(M, \mathcal{T}_M)$,

からなる組 $(\eta, \circ, e, E)$ で，以下の性質を満たすものである：

(1) $\mathcal{O}_M$-双線型形式 η に関する Levi–Civita 接続 $\nabla\colon \mathcal{T}_M \longrightarrow \mathcal{T}_M \otimes_{\mathcal{O}_M} \Omega_M^1$ は平坦である．

(2) 積 $\circ$ は η に関して不変である．すなわち，次が成立する：

$$\eta(\delta \circ \delta', \delta'') = \eta(\delta, \delta' \circ \delta''), \quad \delta, \delta', \delta'' \in \mathcal{T}_M. \tag{3.1}$$

(3) $\mathcal{O}_M$-線形写像 $C\colon \mathcal{T}_M \longrightarrow \mathcal{T}_M \otimes_{\mathcal{O}_M} \Omega_M; \delta \mapsto C(\delta) \coloneqq (- \circ \delta)$ は平坦である．

(4) 積 $\circ$ に関する単位元 e は ∇-平坦な正則ベクトル場である．

(5) Euler ベクトル場 E の Lie 微分について，$\circ$ と η は斉次であり，次数はそれぞれ 1 と $2-d$ である：

$$\mathrm{Lie}_E(\circ) = \circ, \quad \mathrm{Lie}_E(\eta) = (2-d)\eta. \tag{3.2}$$

とくに，Frobenius 構造 $(\eta, \circ, e, E)$ が与えられた複素多様体 M のことを次元 d の **Frobenius 多様体**とよぶ.

命題 3.2. $(M, \eta, \circ, e, E)$ を次元 $d \in \mathbb{C}$ の *Frobenius* 多様体とする．このとき，局所座標系 $(t_1, \ldots, t_\mu)$ と正則関数 $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_M$ で，次を満たすものが存在する：

(1) $e = \dfrac{\partial}{\partial t_1}$ かつ $\mathrm{Ker}\,\nabla \cong \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{\mu} \mathbb{C}_M \frac{\partial}{\partial t_i}$ が成立する.

(2) $\mathcal{O}_M$-双線型形式 η は自然に $\mathbb{C}_M$-双線型形式 $\eta\colon \mathrm{Ker}\,\nabla \times \mathrm{Ker}\,\nabla \longrightarrow \mathbb{C}_M$ を誘導する.

(3) *Euler* ベクトル場は $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{\mu} \Big((1-q_i)t_i + c_i\Big) \frac{\partial}{\partial t_i}$ とあらわされる．ただし，$q_i \neq 1$ のとき，$c_i = 0$ とする.

(4) 等式

$$\eta\left(\frac{\partial}{\partial t_i} \circ \frac{\partial}{\partial t_j}, \frac{\partial}{\partial t_k}\right) = \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k}.$$

が成立する.

(5) 正則関数 $\mathcal{F}$ の E に関する次数は，平坦座標系による 2 次式の不定性を除いて，$3-d$ である：

$$E\mathcal{F} = (3-d)\mathcal{F} + (t_2, \ldots, t_\mu \text{ の 2 次式}).$$

(6) *(WDVV 方程式)*　各 $i, j, k, l = 1, \ldots, \mu$ に対して，次の等式が成立する：

$$\sum_{a,b=1}^{\mu} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_i \partial t_j \partial t_a} \eta^{ab} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_b \partial t_k \partial t_l} = \sum_{a,b=1}^{\mu} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_i \partial t_l \partial t_a} \eta^{ab} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_b \partial t_j \partial t_k}.$$

ただし，$(\eta^{ab}) \coloneqq (\eta_{ab})^{-1}$，$\eta_{ab} \coloneqq \eta(\partial/\partial t_a, \partial/\partial t_b) \in \mathbb{C}$ である． □

上記の命題における局所座標系 $(t_1, \ldots, t_\mu)$ を**平坦座標系**といい，正則関数 $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_M$ を **Frobenius ポテンシャル**という．Frobenius 構造は，平坦座標系と Frobenius ポテンシャルによって局所的に決定される．

複素多様体 M の部分集合 $D \subset M$ を $D \coloneqq \{p \in M \mid \det C_E(p) = 0\}$ と定義する．部分集合 $M^{\mathrm{reg}} \coloneqq M \setminus D$ を，Frobenius 多様体 M の正則部分空間と呼ぶことにする．M^{reg} 上には，重要な不変量である交叉形式が誘導される．Weyl 群不変式論による Frobenius 構造の構成において，交叉形式は中心的な役割を果たす．

定義 3.3. M^{reg} 上の非退化対称 $\mathcal{O}_{M^{\mathrm{reg}}}$-双線型形式 $g\colon \mathcal{T}_{M^{\mathrm{reg}}} \times \mathcal{T}_{M^{\mathrm{reg}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{M^{\mathrm{reg}}}$ を

$$g(\delta, \delta') \coloneqq \eta(C_E^{-1}\delta, \delta'), \quad \delta, \delta' \in \mathcal{T}_{M^{\mathrm{reg}}}, \tag{3.3}$$

と定義し，Frobenius 多様体の**交叉形式**とよぶ．

非退化 $\mathcal{O}_{M^{\mathrm{reg}}}$-双線型形式 g が誘導する $\mathcal{O}_{M^{\mathrm{reg}}}$-同型 $\mathcal{T}_{M^{\mathrm{reg}}} \cong \Omega^1_{M^{\mathrm{reg}}}$ により, $\Omega^1_{M^{\mathrm{reg}}}$ 上にも $\mathcal{O}_M$-双線型形式が定義される．これも, 同様の記号 g を用いてあらわす．交叉形式 $g\colon \Omega^1_{M^{\mathrm{reg}}} \times \Omega^1_{M^{\mathrm{reg}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{M^{\mathrm{reg}}}$ は，平坦座標系 $(t_1, \ldots, t_\mu)$ と Frobenius ポテンシャル $\mathcal{F} \in \mathcal{O}_M$ を用いて

$$g(dt_i, dt_j) = \sum_{a,b=1}^{\mu} \eta^{ia}\eta^{jb} E \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_a \partial t_b}, \quad i, j = 1, \ldots, \mu, \tag{3.4}$$

とあらわされる．そのため, 交叉形式 g は, D 上で退化する $\mathcal{O}_M$-双線型形式 $g\colon \Omega^1_M \times \Omega^1_M \longrightarrow \mathcal{O}_M$ に拡張される．

M^{reg} 上で g は非退化であるため，g に関する Levi–Civita 接続 ∇ が存在する．この接続 ∇ は, Frobenius 多様体の**第二構造接続**と呼ばれる平坦な接続である．第二構造接続に付随する M^{reg} 上の $\mathbb{C}$-局所系

$$\mathrm{Sol}(\nabla) \coloneqq \{x \in \mathcal{O}_{M^{\mathrm{reg}}} \mid \nabla dx = 0\} \tag{3.5}$$

を考える．基点 $p_0 \in M^{\mathrm{reg}}$ を一つ固定することで，群準同型

$$\rho_M\colon \pi_1(M^{\mathrm{reg}}, p_0) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathrm{Sol}(\nabla)_{p_0}$$

が得られる．この写像の像が定める群 $W := \mathrm{Im}\,\rho_M$ を，Frobenius 多様体の**モノドロミー群**とよぶ．M^{reg} のモノドロミー群 W_M による被覆空間を $\widetilde{M}^{\mathrm{reg}}$ であらわす．このとき，自然な写像

$$\widetilde{M}^{\mathrm{reg}} \times \mathrm{Sol}(\nabla)_{p_0} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (\widetilde{p}, x) \mapsto x(\widetilde{p})$$

が得られる．この写像の随伴として，周期写像が定義される．

定義 3.4. $\mathbb{E} := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Sol}(\nabla)_{p_0}, \mathbb{C})$ とおく．Frobenius 多様体の**周期写像**を，次の正則写像として定義する：

$$\Pi \colon \widetilde{M}^{\mathrm{reg}} \longrightarrow \mathbb{E}, \quad \widetilde{p} \mapsto (x \mapsto x(\widetilde{p})). \tag{3.6}$$

周期写像によって，周期領域 $\mathfrak{h}^{\mathrm{reg}} := \Pi(\widetilde{M}^{\mathrm{reg}}) \subset \mathbb{E}$ が定義される．周期領域とモノドロミー群により，Frobenius 多様体の正則部分 M^{reg} が復元される．

命題 3.5. 周期写像 $\Pi \colon \widetilde{M}^{\mathrm{reg}} \longrightarrow \mathbb{E}$ は複素多様体の同型 $\mathfrak{h}^{\mathrm{reg}}/W \cong M^{\mathrm{reg}}$ を誘導する． □

3.2 Bridgeland 安定性条件

$\mathcal{D}$ を $\mathbb{C}$-線形かつ有限型な三角圏とする．$\mathcal{D}$ 上の**安定性条件**とは，群準同形 $Z \colon K_0(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathbb{C}$ と，充満加法部分圏 $\mathcal{P}(\phi)$ の族 $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}(\phi)\}_{\phi \in \mathbb{R}}$ からなる組 $(Z, \mathcal{P})$ で，然るべき公理を満たすものである（詳細については [B] を参照）．$\mathcal{D}$ 上の安定性条件全体のなす集合を $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ であらわす．$\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ には（一般化された）距離から誘導される位相構造が入る．さらに，複素多様体の構造を持つことが知られている．

定理 3.6 ([B])**.** 自然な忘却写像

$$\mathcal{Z} \colon \mathrm{Stab}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K_0(\mathcal{D}), \mathbb{C}), \quad (Z, \mathcal{P}) \mapsto Z,$$

は，局所同相写像となる．とくに，$\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ は複素多様体となる． □

複素多様体 $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ 上の "幾何学的構造" は，様々な種類の変形理論と関連することが期待されている．とくに，$\mathcal{D} = \mathcal{D}^b(\vec{\Delta})$ の場合は，特異点の変形理論とルート系の対応に基づき，次のことが予想されている．

予想 3.7 (cf. [T])**.** *$f \colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ を ADE 型の多項式，$\vec{\Delta}$ を f に対応する型の Dynkin 箙とする．このとき，双正則写像 $M_f \cong \mathrm{Stab}(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta}))$ が存在する．とくに，$\mathrm{Stab}(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta}))$ には Frobenius 構造（及び実構造）が存在する．*

予想 3.7 は，A_2 型の場合に [BQS]，A_n 型の場合に [HKK] によって解決されている．さらに，忘却写像 $\mathcal{Z} \colon \mathrm{Stab}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K_0(\mathcal{D}), \mathbb{C})$ は，原始形式の指数型周期写像に対応することが示されている．この予想から，非自明な複素多様体の同型

$$\mathrm{Stab}(\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})) \cong \mathfrak{h} /\!\!/ W \tag{3.7}$$

が期待される．

4 Weyl 群不変式論による Frobenius 多様体の構成

この章では，一般化ルート系から Frobenius 多様体を構成する．ADE 型の場合を復習した後，主結果について解説する．

4.1 ADE 型ルート系

$\vec{\Delta}$ を Dinkin 箙とする．このとき，導来圏 $\mathcal{D}^b(\vec{\Delta})$ に付随する一般化ルート系が考えられる（命題 2.4)．良く知られているように，この場合の Weyl 群は有限であり，Coxeter 元 $\mathbf{c}$ は有限位数となる．$\mathbf{c}$ の位数を $h \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ であらわし，**Coxeter 数**とよぶ.

定理 4.1 (Chevalley の定理)**.** 以下が成立する：

(1) $\mathfrak{h}$ 上の多項式環 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ の W-不変部分環 $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ は，μ 個の斉次多項式 $p_1, \dots, p_\mu \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ で生成される．とくに，これらの多項式の次数は

$$h = \deg\, p_1 > \deg\, p_2 \geq \cdots \geq \deg\, p_{\mu-1} > \deg\, p_\mu = 2$$

を満たす.

(2) 次数のなす集合 $\{\deg\, p_1, \dots, \deg\, p_\mu\}$ は，斉次多項式 $p_1, \dots, p_\mu$ の取り方に依らない.

(3) *Coxeter* 元 $\mathbf{c}$ の固有値は

$$\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,\frac{\deg\, p_1 - 1}{h}\right), \cdots, \exp\left(2\pi\sqrt{-1}\,\frac{\deg\, p_\mu - 1}{h}\right)$$

で与えられる. □

Chevalley の定理により，複素多様体 $\mathfrak{h}/\!/W$ は $\mathbb{C}^\mu$ と同一視される.

定理 4.2 ([SYS, S-K1, D])**.** 複素多様体 $\mathfrak{h}/\!/W$ 上には，次元 $d = 1 - 2/h$ の *Frobenius* 構造 $(\eta, \circ, e, E)$ で，次の条件を満たすものが一意的に存在する：

(1) *Frobenius* 多様体の交叉形式 g は，*Cartan* 形式 I と同一視される.

(2) $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$ を生成する W-不変多項式 $t_1, \dots, t_\mu$ で，平坦座標系をなすものが存在する.

(3) *Euler* ベクトル場は

$$E = \sum_{i=1}^{\mu} \frac{\deg\, t_i}{h} t_i \frac{\partial}{\partial t_i}$$

で与えられる. □

注意 4.3. ADE 型の多項式 $f \colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ に付随する Frobenius 多様体 M_f 上には，Frobenius 構造が存在する [ST]．この Frobenius 多様体 M_f は，定理 4.2 の Frobenius 多様体 $\mathfrak{h}/\!/W$ と同型であることが知られている.

系 4.4. *Frobenius* 多様体 $\mathfrak{h}/\!\!/W$ のモノドロミー群は，*Weyl* 群と同型である． $\square$

$\mathfrak{h}$ 上の正則部分集合 $\mathfrak{h}^{\mathrm{reg}}$ を次で定める：

$$\mathfrak{h}^{\mathrm{reg}} \coloneqq \mathfrak{h} \setminus \bigcup_{\alpha\in\Delta^{\mathrm{re}}} H_\alpha.$$

ここで，$H_\alpha \coloneqq \{x \in \mathfrak{h} \mid \langle \alpha, x\rangle = 0\}$ は $\alpha \in \Delta^{\mathrm{re}}$ に関するルート超平面である．Weyl 群 W は $\mathfrak{h}^{\mathrm{reg}}$ 上に自由かつ固有不連続に作用することが知られており，とくに $\mathfrak{h}^{\mathrm{reg}}/W$ は複素多様体となる．一方で，Frobenius 多様体 $(\mathfrak{h}/\!\!/W, \eta, \circ, e, E)$ に対して，Frobenius 多様体の正則部分空間 $(\mathfrak{h}/\!\!/W)^{\mathrm{reg}}$ が考えられる．これらの空間は同型であり，命題 3.5 と整合的である：

$$(\mathfrak{h}/\!\!/W)^{\mathrm{reg}} \cong \mathfrak{h}^{\mathrm{reg}}/W.$$

一方で，Frobenius 多様体の正則部分空間 $(\mathfrak{h}/\!\!/W)^{\mathrm{reg}}$ も安定性条件の空間による記述が期待されている．A_n 型箙の場合には，池田氏による次の結果が知られている．

定理 4.5 ([I2])**.** $\check{\mathcal{D}}_N(A_n)$ を，A_n 型箙に付随する *N-Calabi–Yau* 圏とする．このとき，忘却写像 $\mathcal{Z}$ は普遍被覆写像 $\mathcal{Z}\colon \mathrm{Stab}^\circ(\check{\mathcal{D}}_N(A_n)) \longrightarrow \mathfrak{h}^{\mathrm{reg}}$ を誘導する．ここで，$\mathrm{Stab}^\circ(\check{\mathcal{D}}_N(A_n))$ はある連結成分をあらわす．さらに，次の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Stab}^\circ(\check{\mathcal{D}}_N(A_n)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathcal{Z}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \widetilde{(\mathfrak{h}/\!\!/W)^{\mathrm{reg}}} = \widetilde{\mathfrak{h}^{\mathrm{reg}}} \arrow[d, "\Pi"] \\
\mathfrak{h} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{C}) \arrow[r, "\cong"] & \mathbb{E}
\end{tikzcd}$$

ここで，$\widetilde{(\ )^{\mathrm{reg}}}$ は普遍被覆をあらわす． $\square$

4.2 ℓ-Kronecker 箙に付随する一般化ルート系

ℓ-Kronecker 箙 K_ℓ とは，頂点が 2 点集合 $\{\bullet_1, \bullet_2\}$ で，矢が $\bullet_1$ から $\bullet_2$ へ ℓ 本ある箙である：

$$\begin{tikzcd}
K_\ell\colon \ \bullet_1 \arrow[r, bend left, "a_1"] \arrow[r, bend right, "a_\ell"'] \arrow[r, phantom, "\vdots"] & \bullet_2
\end{tikzcd}$$

各頂点の単純表現 S_1, S_2 は例外生成列をなし，とくに $K_0(\mathcal{D}^b(K_\ell))$ の基底を誘導する．基底 $\{[S_1], [S_2]\}$ に関する Cartan 形式 I の行列表示 C_{K_ℓ} は

$$C_{K_\ell} = \begin{pmatrix} 2 & -\ell \\ -\ell & 2 \end{pmatrix}.$$

で与えらる．とくに，C_{K_ℓ} は一般化 Cartan 行列であり，付随する Kac–Moody 代数 $\mathfrak{g}$ が考えられる：

- $\ell=1$ のとき，Kac–Moody 代数 $\mathfrak{g}$ は有限型である（A_2 型），
- $\ell=2$ のとき，Kac–Moody 代数 $\mathfrak{g}$ は affine 型である（affine A_1 型），
- $\ell\geq 3$ のとき，Kac–Moody 代数 $\mathfrak{g}$ は不定型である．

$\ell=1,2$ の場合は Frobenius 多様体の構成が知られているため，以下では，$\ell\geq 3$ の場合を考える．

ADE 型の場合と異なり，Coxeter 元 $\mathbf{c}$ の位数は無限となる．そのため，Coxeter 数 h の別の捉え方を考える．

ρ を Coxeter 元 $\mathbf{c}$ のスペクトル半径とする．具体的には

$$\rho=\frac{\ell^2-2+\sqrt{\ell^4-4\ell^2}}{2}\ (>1)$$

として与えられる．このとき，ρ と ρ^{-1} は Coxeter 元 $\mathbf{c}$ の固有値であり，

$$\rho=\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\frac{\log\rho}{2\pi\sqrt{-1}}\right),\quad \rho^{-1}=\exp\left(-2\pi\sqrt{-1}\frac{\log\rho}{2\pi\sqrt{-1}}\right),$$

とみなすことができる．Chevalley の定理（定理 4.1）に基づき，複素数 $h\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ を $h:=\dfrac{2\pi\sqrt{-1}}{\log\rho}$ と定義することで，

$$\rho=\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\frac{2-1}{h}\right),\quad \rho^{-1}=\exp\left(2\pi\sqrt{-1}\frac{h-1}{h}\right),$$

が得られる．そのため，“次数 $h\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ の W 不変式” を考える必要が生じる．適切な不変式を考えるため，$\mathfrak{h}$ の代わりとなる空間 X を導入する．

正の虚ルートがなす集合 Δ_+^{im} を

$$\Delta_+^{\mathrm{im}}:=\{w(\alpha)\in L\mid w\in W,\ \alpha\in L_+\ \text{s.t.}\ I(\alpha,\alpha_i)\leq 0,\ i=1,2\}.$$

とする．虚錘 $\mathcal{I}\subset\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ を，$\Delta_+^{\mathrm{im}}\cup\{0\}$ の凸包の閉方として定義する．

定義 4.6. 開部分集合 $X\subset\mathfrak{h}$ を次で定義する：

$$X:=\mathfrak{h}\setminus\bigcup_{\lambda\in\mathcal{I}\backslash\{0\}}H_\lambda.$$

また，正則部分集合 $X^{\mathrm{reg}}\subset X$ を次で定める：

$$X^{\mathrm{reg}}:=X\setminus\bigcup_{\alpha\in\Delta^{\mathrm{re}}}H_\alpha,$$

ここで $H_\lambda:=\{Z\in\mathfrak{h}\mid Z(\lambda)=0\}$ は $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に関する超平面である．

次の定理は，空間 X を考える動機の一つであり，A_n 型の場合の定理 4.5 のアナロジーである．

定理 4.7 ([I1])**.** $\check{\mathcal{D}}_2(K_\ell)$ を，K_ℓ に付随する 2-*Calabi–Yau* 圏とする．このとき，忘却写像は被覆写像 $\mathcal{Z}\colon\mathrm{Stab}^\circ(\check{\mathcal{D}}_2(K_\ell))\longrightarrow X^{\mathrm{reg}}$ を誘導する． □

空間 X の基本群は $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$ となることが知られている．X の普遍被覆空間を $\widetilde{X}$ であらわす．Weyl 群 W の作用を，被覆写像 $\widetilde{X} \longrightarrow X$ について同変になるように持ち上げることができる．

定義 4.8. 複素解析空間 $\widetilde{X}/\!\!/W$ を以下のように定義する：

- 底空間を，商位相空間 $\widetilde{X}/W$ として定める．
- 構造層を $\mathcal{O}_{\widetilde{X}/\!\!/W} := \pi_* \mathcal{O}_{\widetilde{X}}^W$ で定める．ただし，$\mathcal{O}_{\widetilde{X}}^W$ は W 不変な $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ の部分層であり，$\pi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}/W$ は自然な商写像である．

命題 4.9. $\widetilde{X}/\!\!/W$ は複素多様体の構造をもつ．さらに，次の同型が存在する：

$$\widetilde{X}/\!\!/W \cong \mathrm{Stab}(\mathcal{D}^b(K_\ell)) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{H}.$$

□

この命題は式 (3.7) のアナロジーであり，複素多様体 $\widetilde{X}/\!\!/W$ 上に Frobenius 構造が存在することが期待される理由の一つである．実際に，ADE 型の場合の定理 4.2 と類似の主張が成立する：

定理 4.10 ([IOST])**.** 複素多様体 $\widetilde{X}/\!\!/W$ 上には，次元 $d = 1 - 2/h$ の *Frobenius* 構造 $(\eta, \circ, e, E)$ で，次の条件を満たすものが一意的に存在する：

(1) *Frobenius* 多様体の交叉形式 g は，*Cartan* 形式 I と同一視される．
(2) W-不変多項式 t_1, t_2 で，平坦座標系をなすものが存在する．
(3) *Euler* ベクトル場は

$$E = t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{2}{h} t_2 \frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{\deg\, t_1}{h} t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\deg\, t_2}{h} t_2 \frac{\partial}{\partial t_2}$$

で与えられる． □

系 4.11. *Frobenius* 多様体 $\widetilde{X}/\!\!/W$ のモノドロミー群は，*Weyl* 群と同型である． □

ℓ-Kronecker 箙に対応する正則関数 f の存在は知られておらず，幾何学的な対象の探求は重要な問題である．また，それに付随する Frobenius 構造の解明や原始形式の理論の探求は，今後の課題である．

参考文献

[B] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. of Math. (2), **166** (2) : 317-345, 2007.

[BQS] T. Bridgeland, Y. Qiu and T. Sutherland, *Stability conditions and A_2-quiver*, Advances in Mathematics, Volume **365**, 13 May 2020, 107049.

[C-B] W. Crawley-Boevey, *Exceptional sequences of representations of quivers*, Representations of algebras (Ottawa, ON, 1992), 117–124, CMS Conf. Proc., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[D] B. Dubrovin, *Geometry of 2d topological field theories*, Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993), Lecture Notes in Math., vol. **1620**, Springer, Berlin, 1996, pp. 120–348.

[DZ] B. Dubrovin and Y. Zhang, *Extended affine Weyl groups and Frobenius manifolds*, Compositio Math. **111** (1998), no. 2, 167–219.

[HKK] F. Haiden, L. Katzarkov, M. Kontsevich, *Flat surfaces and stability structures*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **126** (2017), 247–318.

[I1] A. Ikeda, *Stability conditions for preprojective algebras and root systems of Kac–Moody Lie algebras*, arXiv:1402.1392.

[I2] A. Ikeda, *Stability conditions on CY_N categories associated to A_n-quivers and period maps*, Math. Ann. (2017) **367** : 1 - 49.

[IOST] A. Ikeda, T. Otani, Y. Shiraishi and A. Takahashi, *A Frobenius manifold for ℓ-Kronecker quiver*, Lett. Math. Phys. **112** (2022), no. 1, Paper No. 14, 24 pp.

[KMS] Y. Konishi, S. Minabe and Y. Shiraishi, *Almost duality for Saito structure and complex reflection groups*, Journal of Integrable Systems 2018 (**3**) 1-48.

[NST] S. Nakamura, Y. Shiraishi and A. Takahashi, *On simply-laced generalized root systems*, arXiv:1603.07821

[R] C. Ringel, *The canonical algebras*, Banach Center Publ., **26**, Part 1, Topics in algebra, Part 1 (Warsaw, 1988), 407–432, PWN, Warsaw, 1990.

[S-K1] K. Saito, *On a linear structure of the quotient variety by a finite reflection group*, Publ. RIMS 1993 Volume **29** Issue 4 Pages 535–579.

[S-K2] K. Saito, *Around the theory of the generalized weight system: relations with singularity theory, the generalized Weyl group and its invariant theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **183**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[SYS] K. Saito, T. Yano and J. Sekiguchi, *On a certain generator system of the ring of invariants of a finite reflection group*, Comm. Algebra **8** (1980), no. 4, 373–408.

[ST] K. Saito and A. Takahashi, *From Primitive Forms to Frobenius manifolds*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **78** (2008) 31-48.

[Sat] I Satake, *Frobenius manifolds for elliptic root systems*, Osaka J. Math. **47** (2010), no. 1, 301–330.

[STW] Y. Shiraishi, A. Takahashi, K. Wada, *On Weyl groups and Artin groups associated to orbifold projective lines*, J. Algebra **453** (2016), 249–290.

[T] A. Takahashi, *Matrix Factorizations and Representations of Quivers I*, arXiv:math/0506347.

[高橋] 高橋 篤史, 原始形式・ミラー対称性入門, 岩波書店, 2021.